FUTUREMATH ERASMUS+ PROJECT

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA273 - VEROVATNOĆA I STATISTIKA

Korelaciona i regresiona analiza

Lekcija 16

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA273 - VEROVATNOĆA I STATISTIKA

Lekcija 16

KORELACIONA I REGRESIONA ANALIZA

Uvod

KORELACIONA ANALIZA I LINEARNA REGRESIJA

Koeficijent linearne korelacije, Testiranje hipoteze o koreliranosti dve slučajne promenljive, linearna regresija

Statističko istraživanje veza između pojava vrši se multivarijacionom analizom. Ona se deli na na regresionu analizu i korelacionu analizu. Predmet korelacione analize jeste otkrivanje karaktera i stepena (čvrstine) kvantitativnog slaganja varijacija pojava. Predmet regresione analize jeste otkrivanje forme korelacione veze, odnosno forme slaganja varijacija pojave. Jedna i druga analiza se međusobno dopunjuju.

Zahvaljujući radovima engleskih naučnika Galtona i Pirsona termini “korelacija” i “regresija” su postali opšte prihvaćeni statistički pojmovi. Oni su proučavali, pomoću statističkih metoda, nasledne osobine dece u odnosu na osobine roditelja. Naime, pojam “regresija“ upotrebljen je u statistici kada je 1855. godine Fransis Galton objavio publikaciju u kojoj je analizirao visinu sinova u zavisnosti od visine očeva. Zaključak ove studije bio je da sinovi ekstremno visokih očeva nisu toliko visoki, dakle regresiraju ka prosečnoj visini.

Promena jednog obeležja statističkog skupa često utiče na promenu drugih obeležja zbog međusobne povezanosti. Povezanost između obeležja može se razlikovati i po smeru i po jačini povezanosti. Najjača ili najuža veza između obeležja je funkcionalna veza, tj. takva veza da svakoj vrednosti jednog obeležja odgovara tačno određena vrednost drugog.

Svakako u praksi je ovakav vid povezanosti redak. Slabija povezanost između obeležja, koja je podložna manjim ili većim odstupanjima, naziva se korelativnom (ili stohastičkom) vezom.

Obično se jedna slučajno promenljiva identifikuje kao nezavisna X, a druga kao zavisno slučajno promenljiva Y. Skup statističkih metoda kojima se proučavaju uzajamne veze statističkih obeležja i pojava (smer, jačina, oblik) naziva se teorijom korelacije, a osnovni pokazatelji korelacionih veza su jednačina regresije i koeficijent korelacije.

Ispitivanje zavisnosti u statističkoj analizi ima dva osnovna pravca:

1. jačinu zavisnosti koju određuje korelaciona analiza,

2. oblik zavisnosti koji ispituje regresiona analiza.
U istraživanjima najčešće se sreće linearni model regresione i korelacione analize, pa će se naša razmatranja odnositi na taj model.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Korelacija

DETERMINISTIČKA (FUNKCIONALNA) I STOHASTIČKA VEZA IZMEĐU POJAVA

Međusobne veze između pojava (promenljivih) možemo podeliti u dve grupe: funkcionalne i stohastičke.

Pojam stohastika je starogrčka reč i predstavlja sinonim s pojmom slučajnost. On se koristi u situacijama kada se želi istaći da se neka pojava ili više njih posmatraju sa stanovišta slučajnosti. Ovde ćemo posmatrati povezanost između dve pojave. Obično se jedna od njih posmatra kao nezavisna promenljiva i označava se sa X, dok se druga smatra zavisno promenljivom od X i označava sa Y. Međusobne veze između ovakvih pojava mogu biti determinističke ili stohastičke.

Kada kažemo da između dve ili više pojava postoji deterministička veza ili kako se još kaže funkcionalna veza, tada smatramo da tačno jednoj nezavisno promenljivoj X, odgovara tačno jedna zavisno promenljiva Y. U praksi se veoma retko sreće deterministička veza između pojava. Kada se ona može uočiti, to je od velikog interesa za proučavanje određenih pojava. U informatici, na primer, složenost izvršenja nekog algoritma se može funkcionalno opisati u zavisnosti od veličine ulaza (uz pomoć *O* notacije (ili neke druge)). Na taj način se može precizno odrediti efikasnost nekog algoritma, što je veoma važna njegova karakteristika.
Mnogo slabija vaza između pojava, od determinističke, jeste stohastička veza. Kod stohastičkih veza jednoj vrednosti nezavisne promenljive
odgovara čitav niz mogućih vrednosti zavisne promenljive. Na primer, postavimo pitanje da li i u kojoj meri vreme koje studenti provode na društvenim mrežama utiče na broj predispitnih poena na predmetu MA273 Verovatnoća i statistika? Logika nam kaže da bi određena veza trebalo da postoji. Naime, što student više vremena provodi na društvenim mrežama, ostaje mu manje vreme za učenje. Ako bi ova veza bila deterministička, to bi značilo da svi studenti koji provode isto vremena dnevno na društvenim mrežama, imaju isti broj predispitnih poena, što svakako nije tačno. Dakle, ovde možemo konstatovati da veza postoji, ali da nije deterministička. Ovakva veza je stohastička, jer pored vremena koje student provodi na društvenim mrežama, još mnogo drugih faktora deluje na njegov broj poena, kao što je predznanje iz matematike, da li redovno pohađa nastavu, radne navike i dr. Međutim, i kada bismo više faktora uključili u opisivanje uspešnost studenta na predispitnim obavezama, ne bismo mogli tačno da predvidimo broj njegovih poena. To je zato što je u ovaj model uključena određeni broj nepredvidljivih faktora - slučajnih faktora. Na primer, student nije dobro spavao, ili je imao zdravstvenih problema, ili mu se desio neki neprijatan događaj, što je uticalo na kvalitet realizacije predispitne obaveze, iako ima dobro matematičko predznanje i redovno pohađa nastavu. Ovakve pojave se opisuju stohastičkim modelom.

STOHASTIČKI MODEL

Stohastički model se sastoji od determinističkog i stohastičkog dela.

Stohastički model za neku pojavu (zavisno promenljiva) Y, pored uticaja pojave (nezavisno promenljive) X, uključuju još jedan deo, koji nazivamo stohastički deo. U njemu se nalaze svi drugi faktori koji deluju na pojavu Y, pored pojave X. Dakle, imamo da je

$$Y = \text{determnistički deo} + \text{stohastički deo}.$$

Prirodno se nameće pitanje da li ovakve modele možemo analizirati, jer se u njima nalazi deo koji se sastoji od potpuno ili delimično nepredvidljivih pojava? Odgovor na ovo pitanje je potvrdan, ali se mora uvesti dodatna pretpostavka za stohastički deo. Ona se odnosi na to da nekada na pojavu Y stohastički deo deluje tako što je povećava (ili pojačava), a nekada je smanjuje (ili slabi). Drugim rečima, pretpostavka je da je u proseku vrednost stohastičkog dela jednaka nuli, tj. da je njegovo matematičko očekivanje jednako nuli. To dalje znači, da će u proseku, pojava Y, zavisiti samo od determinističkog dela.

Stohastički model može biti linearan, što znači da je zavisnost pojave Y, linearno zavisna od promenljive X. Ovakvi modeli, mogu biti i nelinearni i tada se za iskazivanje određene zavisnosti koriste polinomi (najčešće drugog reda - kvadratne funkcije) ili eksponencijalne funkcije.

Kada želimo da između dve pojave postavimo stohastički model, najpre, se proverava da li između određenih pojava postoji neki vid zavisnosti, npr. linearna zavisnost. Provera da li takva zavisnost postoji je zadatak korelacione analize. S druge strane, ako se pokaže da takva zavisnost postoji, tada je potrebno i odrediti funkciju koja najpribližnije odražava takvu zavisnost. To je zadatak regresione analize.

POJAM KORELACIJE

Korelacija pretpostavlja verovatnosnu vezu među pojavama zbog čega pojave moraju imati osobinu slučajnosti.

Osobina korelacije među pojavama jeste da se ispoljava u masi slučajeva. Stoga se u njihovoj osnovi nalazi Zakon velikih brojeva o kome smo već govorili. Na osnovu proučavanja individualnih slučajeva vrši se uopštavanje korelacione veze da bi se ispoljila u obliku statističke masovne zakonitosti, kao srednji međuodnos posmatranih pojava. One se kreću u intervalu od potpune zavisnosti do potpune nezavisnosti proučavanih pojava o čemu smo već govorili.

Korelacija pretpostavlja stohastičku (verovatnosnu) vezu među pojavama, zbog čega pojave moraju imati osobinu slučajnosti. Najčešće je pretpostavka da slučajne promenljive (pojave) *X* i *Y* imaju normalne raspodele i tada govorimo o teoriji Normalne korelacije. Teorija Normalne korelacije pretpostavlja, dakle, postojanje normalnih raspodela korelirajućih slučajnih promenljivih. Normalne raspodele se često sreću u praksi, a takođe, kada se povećava broj posmatranih jedinica statističkog skupa, veliki broj raspodela teži normalnoj.

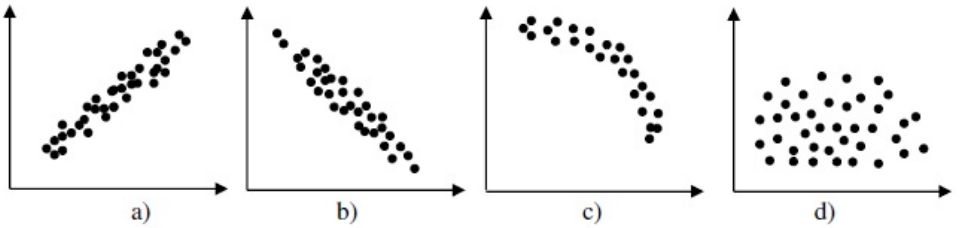
Korelacione veze, u osnovi prirode pojava kod kojih se proučavaju, moraju imati uzročne veze. Uzročne veze među pojavama pretpostavka su postojanja korelacionih veza. Predmet korelacione analize može biti svaka saglasna promena varijacija pojava. Ima slučajeva gde između pojava postoji jaka korelaciona veza iako ne postoji nikakva direktna uzročna veza. Tada je neophodno ispitati eventualno postojanje posredne uzročne veze koja se preko neke treće pojave prenosi na pojave koje se ispituju. U svim slučajevima zaključivanja i interpretiranja korelacione veze pojava, treba na osnovu kvalitativne analize dokazati logiku (kauzalitet) korelacionih veza.

DIJAGRAM RASTURANJA

Kada se ispituje korelacija između dve pojave tada se govori o prostoj korelaciji. Ona može biti linearna i nelinearna.

Korelacija koja se ispituje između dve pojave se naziva prosta korelacija. Ona može biti linearna i nelinearna. Na slici 1 je su dati neki oblici rasturanja posmatranih pojava, kao ilustracija veza koje se mogu javiti između dve posmatrane pojave. Oni se zadaju dijagramom rasturanja. Ovi dijagrami pružaju prve informacije o postojanju koreliranosti između dve posmatrane pojava. Ako korelacija postoji, onda se dobijaju i informacije o obliku korelacione veze (linearna ili nelinearna), kao i smeru veze (direktan ili inverzan).

Dijagram rasturanja pod a) i b) pokazuju postojanje proste linearne korelacije između pojava X i Y. Ona može biti direkna (proporcionalna) kao pod a) ili inverzna (obrnuto proporcionalna) kao pod b). Dakle, u slučaju pod a) sa povećanjem vrednosti jedne slučajne promenljive, povećava i ona druga, dok je u slučaju pod b) porast veličine jedne pojave praćen adom veličina druge pojave. Dijagram rasturanja pod c) predstavlja prostu nelinearnu korelaciju između pojava. Dijagram rasturanja pod d) pokazuje odsustvo bilo kakve korelacione veze između pojava.



Slika 1.1 Različiti oblici dijagrama rasturanja [Izvor: Autor].

Poglavlje 2

Koeficijent linearne korelacije

PIRSONOV KOEFICIJENT

U statističkim ispitivanjima koristi se veoma veliki broj parametara kao mera korelacionih veza. Ipak, najčešće se koristi tzv. koeficijent proste linearne korelacije ili Pirsonov koeficijent.

U statističkim ispitivanjima koristi se veoma veliki broj parametara kao mera korelacionih veza. Ipak, najčešće se koristi tzv. koeficijent proste linearne korelacije ili Pirsonov koeficijent, koji služi kao mera linearne zavisnosti promenljivih X i Y. Koeficijent korelacije je definisan preko varijansi i kovarijansi slučajnih promenljivih X i Y. Kovarijansa se definiše na sledeći način

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Dakle, za slučajne promenljive X i Y koeficijent korelacije, u oznaci, $\rho_{X,Y}$, definiše se sa

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma^2(X) \cdot \sigma^2(Y)}}.$$

Koeficijent proste linearne korelacije u osnovnom skupu obeležavamo sa ρ, a u uzorku obeležavamo sa $r_{X,Y}$. Koeficijent proste linearne korelacije može uzeti vrednost samo iz intervala $[-1, 1]$.

Za ovaj koeficijent važi da je $\left|\rho_{X,Y}\right| \leq 1$, pri čemu je $\left|\rho_{X,Y}\right| = 1$ ako i samo ako je $Y = \alpha X + \beta$, gde je $\alpha > 0$ za $\rho = 1$, a $\alpha < 0$ za $\rho = -1$, ako su slučajne promenljive X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je $\rho_{X,Y} = 0$ (obrnuto ne mora da važi).

SKALA ODREĐIVANJE LINEARNE ZAVISNOSTI PREMA PIRSONOVOM KOEFICIJENTU

Prema vrednostima Pirsonovog koeficijenta linearna veza može biti slaba, značajna, jaka ili veoma jaka, ili da veza nije linearna (ali se ne isključuju nelinearni oblici povezanosti).

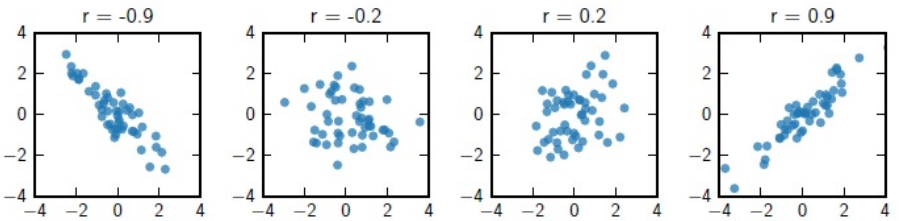
Dakle, kada na istoj populaciji posmatramo dve numeričke karakteristike prirodno se postavlja pitanje da li se među ovim vrednostima može ustanoviti postojanje neke veze (ovde govorimo, kao što je već rečeno o linearnoj zavisnosti dve slučajne promenljive). Ako

(x_1, y_1), (x_2, y_2) , ... , (x_n, y_n) predstavlja jedan dvodimenzionalni uzorak, tada se koeficijent linearne korelacije traži po sledećem obrascu:

$$r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}}, \quad \text{gde su} \quad \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \text{i} \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

izračunate srednje vrednosti prvih i drugih elemenata uređenih parova (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Pritom se smatra da je za:
- $0 < |r_{X,Y}| \leq 0,3$ veza nije linearna, ali se ne isključuju nelinearni oblici povezanosti,
- $0,3 < |r_{X,Y}| \leq 0,5$ linearna veza je slaba,
- $0,5 < |r_{X,Y}| \leq 0,7$ linearna veza je značajna,
- $0,7 < |r_{X,Y}| \leq 0,9$ linearna je jaka,
- $0,9 < |r_{X,Y}| \leq 1$ linearna veza je vrlo jaka.



Slika 2.1 Dijagram rasturanja za dve pojave u zavisnosti od vrednosti njihovog koeficijenta linearne korelacije [Izvor: Autor].

Na slici je predstavljeno nekoliko primera dijagrama rasturanja u zavisnosti od veličine za r. Vidimo da što je vrednost za r po apsolutnoj vrednosti bliža broju 1, time je povezanost između posmatranih obeležja jača. Negativna vrednost za linearnu korelacija ukazuje na da su posmatrana obeležja obrnuto proporcionalna, dok pozitivna vrednost ukazuje na to da su direktno proporcionalna.

PRIMER – 1. DEO

Određivanja Pirsonovog koeficijenta.

Odrediti karakter linearne veze za podatke date u tabeli:

x_i	185	193	172	177	201	205	166	178	190	184	186	158	115	194	166
y_i	86	88	51	86	100	90	72	90	92	100	82	42	110	92	72

Slika 2.2 Tabela s podacima [Izvor: Autor].

Rešenje. Imamo da je

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{15} \frac{x_i}{15} = \frac{2750}{15} = 183,333 \qquad \text{i} \qquad \overline{x} = \sum_{i=1}^{15} \frac{y_i}{15} \frac{1253}{15} = 83,533,$$

Dalje imamo da

$$\sum_{i=1}^{15} (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y}) = 1,670247 + \ldots = 2711,333,$$

$$\sum_{i=1}^{15} (x_i - \overline{x})^2 = 1,67^2 + \ldots = 4552,73$$

$$\sum_{i=1} 15(y_i - \overline{y})^2 = 2,47^2 + \ldots = 2619,32.$$

Konačno imamo da je

$$r_{X,Y} = \frac{2711,33}{\sqrt{4552,73 \cdot 2619,32}} = 0,785.$$

Na osnovu prethodno date skale, zaključujemo da je linearna veza jaka.

PRIMER – 2. DEO

Radna tablica koja se koristi za lakše određivanje traženih veličina.

Veličine koje smo koristili prilikom određivanja koeficijenta linearne korelacije preglednije se izračunavaju i predstavlja preko sledeće tabele:

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
185	86	1,67	2,47	4,12	2,79	6,10
193	88	9,67	4,47	43,22	93,51	19,98
172	51	-11,33	-32,53	368,56	128,37	1058,20
177	86	-6,33	2,47	-15,64	40,07	6,10
201	100	17,67	16,47	291,02	312,23	271,26
205	90	21,67	6,47	140,20	469,59	41,86
166	72	-17,33	-11,53	199,81	300,33	132,94
178	90	-5,33	6,47	-34,48	28,41	41,86
190	92	6,67	8,47	56,49	44,49	71,74
184	100	0,64	16,47	11,03	0,45	271,26
186	82	2,67	-1,53	-4,08	7,13	2,34
158	42	-25,33	-41,53	1051,95	641,61	1724,24
195	110	11,67	26,47	308,90	136,19	700,66
194	92	10,67	8,47	90,37	113,85	71,74
166	72	-17,33	-11,53	199,81	300,33	132,94
2750	1253			2711,28	2619,20	4553,72

Slika 2.3 Radna tabela [Izvor: Autor].

DODATNA OBJAŠNJENJA O KOEFICIJENTU LINEARNE KORELACIJE

U praksi se ponekad koeficijent linearne korelacije ili loše tumači ili se dobijeni rezultati zloupotrebljavaju.

Navodimo nekoliko objašnjenja kako treba tumačiti koeficijent linearne korelacije.

- koeficijent linearne korelacije je relativna mera, jer se ne izražava u jedinici mere;
- koeficijent linearne korelacije se može koristiti samo za određivanje povezanosti između dve pojave koje se numerički mogu predstaviti;
- ovaj koeficijent ukazuje samo na linearnu povezanost između pojava - ako je $r = 0$ to ne znači da između pojava nema nelinearne korelacije.
- korelacijom se samo meri povezanost između pojava. U ovom slučaju, ne smemo jednu promenljivu da proglasimo za uzrok, a drugu da je njena posledica;
- postoje mnogi primeri u praksi gde se između dve ili više pojava između kojih ne postoji nikakva logička povezanost uspostavljena lažna linearna korelacija, jer se pokazuje da je koeficijent proste linearne korelacije različit od nule;
- Pirsonov koeficijent korelacije ne daje informaciju o tome koliko je povezanost između pojava uslovljena i drugim, za nas nepoznatim faktorima. Ovaj problem rešava uvođenjem nove veličine koja se naziva koeficijent determinacije i on predstavlja meru za objašnjeni varijabilitet koji se javlja. Važi da je

$$\text{koeficijent determinacije } = r_{X,Y}^2.$$

  Iz prethodnog primera, kako je $r = 0,785,$ tada vrednost koeficijenta determinacije iznosi 0,6162 što nam pokazuje da je uzajmi uticaj promenljivih X i Y iznosi 61,62%. Vrednost $1 - r_{X,Y}^2$ se naziva koeficijent alijenacije. On ukazuje na postojanje drugih faktora koji deluju, tj. predstavlja meru za neobjašnjeni varijabilitet.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Koeficijent linearne korelacije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Prosta linearna regresija

REGRESIONI MODEL

Regresioni model je matematički model koji opisuje vezu između dve ili više promenljivih. Prost regresioni model obuhvata samo dve promenljive: jednu objašnjavajuću i jednu zavisnu.

Regresioni model je matematički model koji opisuje vezu između dve ili više promenljivih. Prost regresioni model obuhvata samo dve promenljive: jednu objašnjavajuću i jednu zavisnu. Zavisna promenljiva je promenljiva čije varijacije treba da objasnimo na osnovu kretanja objašnjavajuće promenljive. U regresionom modelu, objašnjavajuća promenljiva se obično obeležava sa X, a zavisna promenljiva sa Y.
Međuzavisnost između dve promenljive u regresionoj analizi izražava se matematičkom jednačinom koja se naziva regresiona jednačina ili regresioni model. Veza između promenljivih može biti različitog oblika, uključujući i linearnu vezu. Regresioni model kojim izražavamo linearnu vezu između dve promenljive se naziva linearni regresioni model. Regresioni model kojim se opisuje linearna međuzavisnost između dve promenljive naziva se prost linearni regresioni model. Ovde ćemo se njime baviti. U ostalim slučajevima se radi o nelinearnom regresionom modelu.

Prost linearni regresioni model je oblika

$$Y = a + b \cdot X,$$

gde koeficijent b predstavlja koeficijent pravca prave, a a odsečak na Oy osi. Ovaj model se naziva deterministički model i pokazuje determinističku (egzaktnu ili funkcionalnu) vezu između promenljivih X i Y. Preciznije, ovaj model podrazumeva da je promenljiva Y deterministički (egzaktno) određena promenljivom X, odnosno da za datu vrednostl postoji jedna i samo jedna vrednost Y. Kao što smo već rekli, u praksi veza između ovih promenljivih je stohastička, jer postoji uticaj i mnogih drugih faktora, koji dovode do varijacija u vrednostima koje uzima promenljiva Y, za iste vrednosti promenljive X . Uticaj tih faktora u prostom linearnom regresionom modelu obuhvatamo dodatnim članom, koji nazivamo slučajna greška koji ćemo označiti sa δ i on je, zapravo, oblika

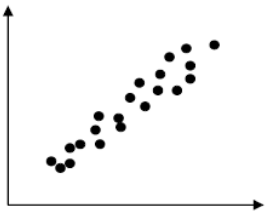
$$Y = a + b \cdot X + \delta.$$

U nastavku ćemo ukazati na to kako se dolazi do prostog linearnog regresionog modela i koje su to etape u njegovom dobijanju.

ETAPE U DOBIJANJU PROSTOG LINEARNOG REGRESIONOG MODELA

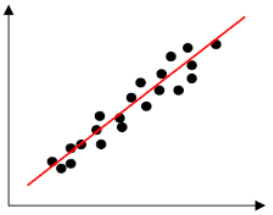
Potrebno je definisati korake koje treba proći kako bi se dobio i potvrdio linearni regresioni model.

U regresionoj analizi, najpre, mora da se izvrši identifikacija promenljivih. To znači da je potrebno odrediti koja je pojava zavisna promenljiva, a koja pojava je objašnjavajuća promenljiva. Nakon toga potrebno je izabrati slučajni uzorak $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, i na osnovu dijagrama rasturanja da li za ove vrednosti prava predstavlja najbolji oblik povezanosti između posmatrane dve pojave. Na narednoj slici je dat dijagrama rasturanja za jedan uzorak.



Slika 3.1 Dijagram rasturanja [Izvor: Autor].

Sa slike se vidi da bi se ovakav uzorak mogao aproksimirati pravom, što je predstavljeno na narednoj slici.



Slika 3.2 Linearna veza između vrednosti u uzorku [Izvor: Autor].

Stoga, možemo izabrati prost linearni regresioni model.
Ako sa y_i označimo zavisno promenljivu veličinu dobijenu iz uzorka, a sa x_i objašnjavajuće veličine dobijene iz uzorka, za $i = 1, 2, \ldots, n$, tada imamo da je odgovarajući prost linearni regresioni model, definisan na sledeći način

$$y_i = a + b \cdot x_i + \delta_i, i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (*)$$

gde su a i b regresioni parametre koje treba odrediti, a $\delta_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ je stohastički član ili slučajna greška, pri i -tom članu uzorka. Naime, u slučajnom uzorku, za iste vrednosti po veličini x^*, dobijaćemo različite vrednosti za y. Kada se bude definisala regresiona prava, ona će prolaziti tačku $(x^*, \overline{y})$, gde $\overline{y}$ predstavlja prosečnu vrednost dobijenu po veličini y. Na ovoj logici se zasniva određivanje parametara a i b. Kada odredimo a i b tada tako dobijenu pravu koristimo kao model za ponašanje čitave populacije. Ovo nam, dalje, omogućava da za poznate vrednosti po veličini x, predviđamo prosečnu vrednost za y.

Sledeći korak jeste provera da li su ispunjene pretpostavke za primenu ovog modela. On

podrazumeva da u formuli (*) važi $\delta_i : \mathcal{N}(0, \sigma^2), i = 1, 2, \ldots, n$, tj. da se slučajna greška jeste slučajna promenljiva koje ima normalnu raspodelu, za koju je $E(\delta_i) = 0$, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$. Takođe, bilo koje dve slučajne greške δ_i i δ_j, $(i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n)$ ne smeju biti korelirane. Na kraju, veličine za x su veličine koje istraživač sam zadaje, dakle one nemaju karakter slučajnost, a veličine za Y se određuju na osnovu uzorka.

Nakon toga treba izvršiti ocenjivanje parametara a i b u datom modelu. O tome govorimo u nastavku.

IZRAČUNAVANJA KOEFICIJENATA

Da bi smo kvantifikovali približnu linearnu vezu između dva obeležja, možemo konstruisati pravu koja najbolje opisuje vezu među tim podacima.

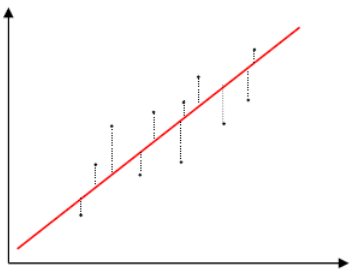
Postoji egzaktan matematički način kojim se prikazuje najbolje prilagođen pravac linearne veze. Određuje se iz uslova da je zbir kvadrata vertikalnih udaljenosti tačaka od pravca najmanji – metoda najmanjih kvadrata. Osnove metode najmanjih kvadrata predložio je Karl Gaus.

U slučaju regresione prave (videti sliku ispod), ideja je da za posmatrani uzorak $(x_1, y_1), (x_2 y_2), \ldots, (x_n y_n)$, uočimo i -to odstupanje, u oznaci D_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ za koje važi

$$D_i = y_i - (a + b \cdot x_i),$$

i da odredimo koeficijente a i b tako da zbir kvadrata svih ovih odstupanja bude minimalan. Ako uvedemo oznaku $F(a, b) = D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2$, tada treba da odredimo minimum funkcije

$$F(a, b) = [y_1 - (a + b \cdot x_1)]^2 + [y_2 - (a + b \cdot x_2)]^2 + \ldots + [y_n - (a + b \cdot x_n)]^2.$$



Slika 3.3 Linearna regresija - metod najmanjih kvadrata [Izvor: Autor].

Očigledno, funkcija $z = F(a, b)$ je funkcija dve promenljive i najpre ćemo morati da uvedemo postupak za određivanje lokalnih ekstrema za funkcije dve promenljive, a nakon toga ćemo njega primeniti na posmatranu funkciju. Da bismo uveli postupak za određivanje lokalnih ekstrema funkcije dve promenljive, najpre, ćemo se podsetiti neophodnih pojmova u vezi sa njom.

Poglavlje 4

Pojam funkcije dve promenljive

DEFINICIJA I GRAFIK FUNKCIJE DVE PROMENLJIVE

Funkcija dve promenljive, isto kao i funkcija jedne promenljive, može biti zadana u eksplicitnom, parametarskom obliku, ili u implicitnom obliku.

Definicija. Realna funkcija dve realne promenljive je bilo koje pravilo ili zakon po kome se svakom uređenom paru (x, y) iz nekog skupa $A \subseteq \mathbb{R}^2$ pridružuje tačno jedan broj $z \in B \subseteq \mathbb{R}$.

Napomena. Ubuduće ćemo realnu funkciju dve realne promenljive kraće zvati funkcija dve promenljive.

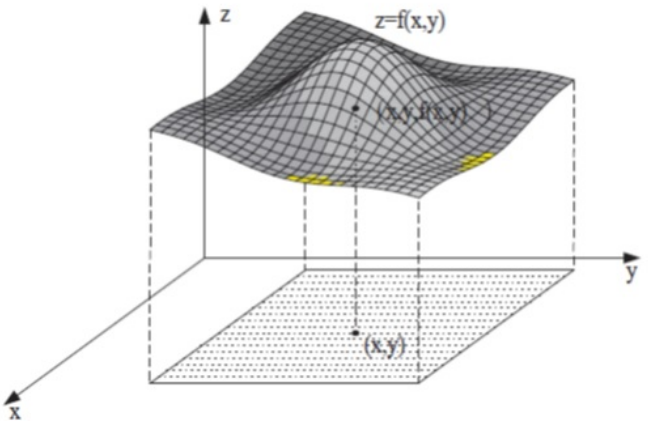
Skup A se naziva domen funkcije ili oblast definisanosti funkcije, a skup B se naziva skup vrednosti ili kodomen funkcije. Vrednosti x i y se nazivaju nezavisno promenljive (ili argumenti), a vrednost z se naziva zavisno promenljiva.

Funkciju dve promenljive u eksplicitnom obliku zapisujemo sa $z = f(x, y)$. Ona može biti data u parametarskom, kao i u implicitnom obliku, o čemu će biti reči kasnije.

Oblast definisanosti funkcije dve promenljive je skup tačaka $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje $z = f(x, y)$ može da se odredi. Ovde važe iste napomene u vezi sa oblašću definisanosti kao i kod funkcije jedne promenljive.

Grafik generisan realnom funkcijom dve realne promenljive (videti sliku) predstavlja skup tačaka u $\mathbb{R}^3$ dat sa

$$\Gamma_f = \{\big(x, y, f(x, y)\big) \mid (x, y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$



Slika 4.1 Grafik realne funkcije dve realne promenljive [Izvor: Autor].

U našem razmatranju isključivo ćemo se baviti funkcijama koje će za grafik imati neprekidnu, ili na malom delu prekidnu površ.

Napomena. Na način kako je definisana funkcije dve promenljive, analogno se može definisati i funkciju tri ili više promenljivih.

PRIMER

Određivanje domena funkcije dve promenljive.

Odrediti domene sledećih funkcija:

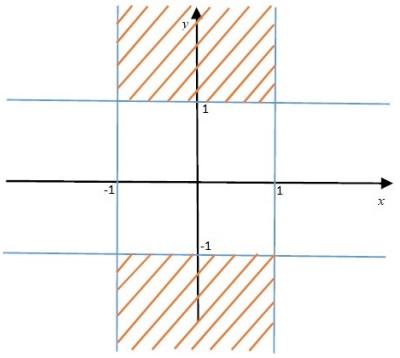
$$a)\ z = x^2 + y^2 + 2x - 1, \qquad b)\ z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1},$$
$$c)\ z = \ln(4 - x^2 - y^2), \qquad d)\ z = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + y^2}}.$$

Rešenje.

a) U ovom slučaju nema nikakvih ograničenja, pa je domen $\mathbb{R}^2$.

b) Zbog korena parnog reda neophodno je da bude $1 - x^2 \geq 0$ i $y^2 - 1 \geq 0$. Tada je domen ove funkcije skup

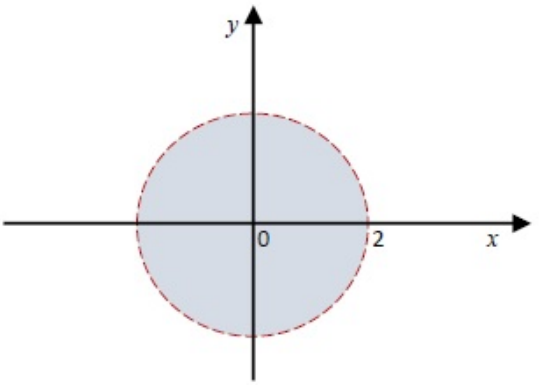
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \wedge y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}.$$



Slika 4.2 Domen funkcije $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$ [Izvor: Autor].

c) Zbog logaritamske funkcije mora biti $4 - x^2 - y^2 > 0$, tj. $x^2 + y^2 < 4$. Dakle, domen ove funkcije je unutrašnjost kruga $x^2 + y^2 = 4$, bez kružnice, tj.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$



Slika 4.3 Domen funkcije $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$ [Izvor: Autor].

d) Kako imamo koren neparnog reda, zbog njega nema nikakvih ograničenja i jedino ograničenje je $x^2 + y^2 \neq 0$, tj.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0\}.$$

Dakle, domen funkcije su sve tačke iz ravni, bez koordinatnog početka, tj. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a - određivanje domena funkcije dve promenljive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DVODIMENZIONALNA OBLAST

Uvedeni su pojmovi: otvoren skup, povezan skup, granica, zatvorena oblast, ograničena oblast i neograničena oblast u prostoru $\mathbb{R}^2$.

Uvešćemo sada pojam dvodimenzionalne oblasti, koji nam je potreban za dalje izlaganje. Da bismo ga definisali, najpre, moramo definisati pojmove otvoreni skup i povezani skup u $\mathbb{R}^2$.

Definicija. U prostoru $\mathbb{R}^2$ za skup se kaže da je otvoren ako i samo ako se oko svake njegove tačke može opisati krug koji ceo pripada njemu.

Definicija. U prostoru $\mathbb{R}^2$ za skup se kaže da je povezan ako i samo ako je putno povezan.

Napomena. Neki skup je putno povezan ako svake dve njegove različite tačke možemo spojiti putem koji ceo pripada skupu (put je bilo koja neprekidna kriva u $\mathbb{R}^2$).

Definicija. Neki skup nazivamo oblast u $\mathbb{R}^2$ ili dvodimenzionalna oblast ako i samo je taj skup otvoren i povezan u prostoru $\mathbb{R}^2$,

Definicija. Tačka A se naziva granična tačka neke oblasti E ako i samo ako svaka okolina tačke A, pored tačaka iz oblasti E, sadrži i tačke koje ne pripadaju oblasti E.

Skup svih graničnih tačaka neke oblasti E nazivamo granica oblasti i označavamo ∂E.

Ako nekoj otvorenoj oblasti E pridružimo sve njene granične tačke dobijamo skup tačaka koje zovemo zatvorena oblast i nju označavamo sa $\overline{E}$ (tj. važi $\overline{E} = E \cup \partial E$).

Ako za datu oblast možemo naći krug konačnog poluprečnika, koji pokriva tu oblast, onda tu oblast nazivamo ograničena oblast. U suprotnom oblast nazivamo neograničena oblast.

Poglavlje 5

Granična vrednost i neprekidnost

DEFINICIJA GRANIČNE VREDNOSTI

Za granične vrednosti funkcije dve ili više promenljivih važe analogni stavovi kao za granične vrednosti funkcije jedne promenljive.

Da bismo definisali graničnu vrednost funkcije dve promenljive potrebno je, najpre, definisati pojam okoline tačke $A(x_0, y_0)$.

Definicija. Proizvoljan skup tačaka u ravni se naziva okolina tačke $A(x_0, y_0)$ ako i samo ako sadrži unutrašnjost kruga sa centrom u tački A poluprečnika ε, gde je ε pozitivan broj.

Specijalno, unutrašnjost kruga sa centrom u tački A poluprečnika ε, zovemo $\varepsilon -$ okolinom tačke A . Označavaćemo je sa $U_\varepsilon(A)$.

Definicija. Broj b se naziva granična vrednost funkcije $z = f(x, y)$, kada $x \to x_0$, $y \to y_0$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji δ -okolina tačke $A(x_0, y_0)$ takva da za sve tačke iz te okoline, osim možda u tački A, važi nejednakost

$$\left|f(x, y) - b\right| < \varepsilon.$$

Tada pišemo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b, \quad \text{ili} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = b.$$

Analogno se može definisati i granična vrednost funkcije tri i više promenljivih.

Napomena. Ako granična vrednost funkcije dve promenljive postoji u nekoj tački, ona mora davati istu konačnu vrednost, bez obzira kako joj prilazimo. To znači da, ako želimo da dokažemo da granična vrednost u nekoj tački ne postoji, dovoljno je naći dva pravca po kojima prilazimo posmatranoj tački, a da pri tom dobijamo različite vrednosti posmatranih limesa (konačne ili beskonačne).

PRIMER 1

Određivanje granične vrednosti funkcije dve promenljive.

Ispitati da li postoje sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$;

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6-y^6}{x^3+y^3}$;

Rešenje. a) Posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$. Naime, ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $x=0$ (tj. po $y-$ osi), tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3,$$

a ako se približava po pravoj $y=0$ (tj. po $x-$ osi), onda je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.

b) Posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$. Ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=2x$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{x^2+16x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{1+16x^2} = 0.$$

Međutim, ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po paraboli $y=\sqrt{x}$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.

c) Posmatrana granična vrednost postoji, jer je

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6-y^6}{x^3+y^3} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^3-y^3\right) = 0.\end{aligned}$$

PRIMER 2

Određivanje granične vrednosti funkcije primenom polarnih koordinata. Ona je pogodna za primenu kada se pod limesom javljaju funkcije koje sadrže kvadratne forme x^2+y^2.

Napomena. U situacijama kada se pod limesom javljaju funkcije koje sadrže kvadratne forme x^2+y^2, odnosno njihova uopštenja, takvi limesi se mogu rešavati uvođenjem polarnih koordinata $x=\rho\cos\theta$ i $y=\rho\sin\theta$, ili njihovih uopštenja, gde je $\rho>0$ i $\theta\in(0,2\pi]$. Na ovaj način se dobija granična vrednost samo po promenljivoj ρ kojom se prilazi tački u kojoj se ispituje granična vrednost, dok se veličinom θ "pokrivaju" svi pravci kojima se može prići toj tački.

Ispitati da li postoji granična vrednost

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}.$$

Rešenje. Shodno prethodno rečenom, ovaj zadatak možemo rešiti na sledeći način

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0}\frac{e^{-\rho}-1}{\rho}=-\lim_{\rho\to0}\frac{e^{-\rho}-1}{-\rho}=-1,$$

gde imamo da, zbog $x\to0$ i $y\to0$, važi $\rho\to0$, gde je $\theta\in(0,2\pi]$.

DEFINICIJA NEPREKIDNOSTI

Uveden je pojam neprekidnosti funkcije u tački i pojam neprekidnosti funkcije na zatvorenoj oblasti.

Pojam neprekidnosti funkcija dve ili više promenljivih u tački se zadaje analogno kao i u slučaju funkcije jedne promenljive.

Definicija. Funkcija $z=f(x,y)$ je neprekidna u tački $A(x_0,y_0)$ ako je definisana u nekoj okolini ove tačke i ako je

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Za funkcije dve ili više promenljivih koje su neprekidne u nekoj tački važe analogni stavovi kao za funkcije jedne promenljive. Kod funkcije jedne promenljive smo neprekidnost posmatrali na intervalu, dok se kod funkcija dve ili više promenljivih posmatra neprekidnost funkcije u odgovarajućoj oblasti na analogan način i sa analognim stavovima.

Poznajući pojam dvodimenzionalne oblasti možemo definisati neprekidnosti funkcije na oblasti u $\mathbb{R}^2$.

Pri definisanju pojma neprekidnosti na zatvorenoj oblasti zahteva se neprekidnost u svakoj tački te oblasti, pri čemu se podrazumeva da je funkcija neprekidna u graničnoj tački A, ako je ispunjena jednakost

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

gde tačke (x, y) teže ka tački $A(x_0, y_0)$ po tačkama iz te oblasti.

Za funkcije neprekidne u ograničenoj zatvorenoj oblasti D važi da su u toj oblasti:

1. ograničene,

2. dostižu u toj oblasti najveću i najmanju vrednost,

3. dostižu u toj oblasti svaku vrednost između najveće i najmanje vrednosti.

PRIMERI

Provera neprekidnosti funkcije u tački.

Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Rešenje. Ova funkcija je neprekidna u svakoj tački ravni $\mathbb{R}^2$, osim možda u tački $(0,0)$. Proverimo šta se dešava u njoj. Za $x = y$ imamo da je

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

dok za $x = -y$ važi

$$f(x,-x) = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$$

ne postoji, pa je funkcija $f(x,y)$ prekidna u tački $(0,0)$.
Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Rešenje. Ova funkcija je neprekidna u svakoj tački ravni $\mathbb{R}^2$, osim možda u tački $(0,0)$. Kako važi

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} = x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \quad \text{i} \quad 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1,$$

imamo da je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Poslednje važi, jer predstavlja proizvod beskonačno male veličine (to je x) i ograničene funkcije (to je $\frac{x^2}{x^2+y^2}$).
Dakle, posmatrana funkcija je neprekidna na celom $\mathbb{R}^2$.

VIDEO KLIP

Neprekidnost funkcije dve promenljive.

Poglavlje 6

Parcijalni izvodi

TOTALNI PRIRAŠTAJ

Korišćenjem pojmova totalni priraštaj funkcije i parcijalni priraštaj funkcije po odgovarajućoj promenljivoj, mogu se uvesti pojmovi parcijalni izvod funkcije po odgovarajućoj promenljivoj.

Kao što smo rekli, pod pojmom funkcije dve promenljive definisane na $\mathcal{D}$ (što nam je oznaka za domen) podrazumevamo jednoznačno dodeljivanje

$$(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

gde $(x, y) \in \mathcal{D}$.
Formulom (1) zadat je pojam navedene funkcije čije vrednosti na $\mathcal{D}$ se generišu pravilom f i ona može biti data u eksplicitnom, implicitnom ili parametarskom obliku. Mi ćemo u većini razmatranja koristiti eksplicitan oblik zadavanja, a analogne teorije postoje i za druga dva oblika.
Grafik generisan formulom (1) predstavlja skup tačaka u $\mathbb{R}^3$ dat sa

$$\Gamma_f = \Big\{ \big(x, y, f(x, y)\big) \mid (x, y) \in D \Big\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

U našem razmatranju isključivo ćemo se baviti funkcijama koje će za grafik imati neprekidnu, ili na malom delu prekidnu površ. Znači, ubuduće imamo posla sa funkcijama oblika

$$z = f(x, y), \quad \text{za } (x, y) \in \mathcal{D}\,.$$

Da ponovimo, kod ovakvih funkcija veličine x i y su nezavisne promenljive, a veličina z je zavisna realna promenljiva.
Neka je data oblast $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je data tačka $A = (a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. Takođe, neka je na D data funkcija $z = f(x, y)$.

Definicija. Totalni priraštaj funkcije f u tački A (sa priraštajima argumenata Δx i Δy), u oznaci Δf, je veličina

$$\Delta f = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)\,, \tag{2}$$

gde su Δx i Δy realne veličine različite od nule.

U slučaju kada u (2) važi da je:

1° $\Delta y = 0$ -- tada $\Delta f = f(a_1 + \Delta x, a_2) - f(a_1, a_2)$nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije f u tački A po prvoj promenljivoj (po x) i označavamo sa $\Delta_x f$.

2° $\Delta x = 0$ -- tada $\Delta f = f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije f u tački A po drugoj promenljivoj (po y) i označavamo sa $\Delta_y f$.

PARCIJALNI IZVODI FUNKCIJE DVE PROMENLJIVE

Parcijalni izvod neke funkcije može da postoji ili ne u $\mathbb{R}$ u $\pm\infty$.

Koristeći 1° i 2° kreirajmo sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}, \tag{3.1}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}. \tag{3.2}$$

Granične vrednosti (3.1) i (3.2) mogu postojati ili ne u $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ako su konačne, nazovamo ih parcijalni izvodi prvog reda funkcije f u tački $A \in \mathcal{D}$ po prvoj, odnosno po drugoj promenljivoj, respektivno. U tom slučaju koristimo jednu od sledećih oznaka

$$f'_x(x,y)\big|_A, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{ili} \quad f'_x(A),$$

$$f'_y(x,y)\big|_A, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{ili} \quad f'_y(A).$$

Za ova dva parcijalna izvoda prvog reda možemo kreirati funkcije tih parcijalnih izvoda

$$\begin{aligned} &f'_x(x,y), \quad \text{za } (x,y) \in \mathcal{D}, \\ &f'_y(x,y), \quad \text{za } (x,y) \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Prethodno date funkcije su opet funkcije po promenljivim x i y.

Napomena Praktično nalaženje funkcija koje su parcijalni izvodi početne funkcije se može uraditi na sledeći način:
- polaznu funkciju $f(x,y)$ diferenciramo samo po x (y smatramo konstantom) i time dobijemo $f'_x(x,y)$, za $(x,y) \in \mathcal{D}$,

- polaznu funkciju $f(x,y)$ diferenciramo samo po y (x smatramo konstantom) i time dobijemo $f'_y(x,y)$, za $(x,y) \in \mathcal{D}$.

PRIMER 1

Određivanje prvih parcijalnih izvoda.

Naći odgovarajuće parcijalne izvode funkcija:

$$a)\ z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \qquad b)\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ u tački } A(1,1).$$

Rešenje.
a)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Tada je: $z'_x(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $z'_y(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

PRVI PARCIJALNI IZVODI SLOŽENE FUNKCIJE

Pravilo za određivanje prvih parcijalnih izvoda u situaciji kada funkcija složena. Analogno pravilo smo dali i prilikom određivanje prvog izvoda funkcije jedne promenljive.

Funkcije više promenljivih mogu biti složene, pa tako ako je $z = f(u,v)$ funkcija od u i v, pri čemu su $u = u(x,y)$ i $v = v(x,y)$ funkcije od x i y, onda je z složena funkcija od x i y

$$z = f(u(x,y), v(x,y)) = g(x,y)$$

a njeni parcijalni izvodi po x i y se dobijaju kao

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DRUGI PARCIJALNI IZVODI

Parcijalni izvodi drugog reda se dobijaju traženjem parcijalnih izvoda od parcijalnih izvoda prvog reda.

Za funkciju f u tački $A \in D$ možemo formirati parcijalne izvode drugog reda po jednoj, odnosno po drugoj promenljivoj na sledeći način: neka su date izvodne funkcije parcijalnih izvoda prvog reda funkcije $z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$ sa

$$f'_x(x, y), \qquad f'_y(x, y), \qquad (x, y) \in D.$$

Za njih je moguće (ponaosob) potražiti parcijalne izvode prvog reda u tački $A \in D$ (ako su za to obezbedeni uslovi) i time dobijamo:

$$f'_x(x, y)\Big|'_x\Big|_A,\ f'_x(x, y)\Big|'_y\Big|_A,\ f'_y(x, y)\Big|'_x\Big|_A,\ f'_y(x, y)\Big|'_y\Big|_A,$$

gde je $A = (a1, a2) \in D$.

Standardne oznake za prethodno date parcijalne izvode su:

$$f''_{xx}(x, y)\Big|_A,\ f''_{xy}(x, y)\Big|_A,\ f''_{yx}(x, y)\Big|_A,\ f''_{yy}(x, y)\Big|_A$$

ili

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Takodje, umesto oznaka

$$f''_{xx}(x, y)\Big|_A,\ f''_{yy}(x, y)\Big|_A$$

mogu se koristiti i oznake

$$f''_{x^2}(x, y)\Big|_A,\ f''_{y^2}(x, y)\Big|_A.$$

Parcijalni izvodi $f''_{xy}(x, y)|_A$ i $f''_{yx}(x, y)|_A$ se nazivaju mešoviti parcijalni izvodi drugog reda.

Umesto oznaka

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

mogu se koristiti i oznake:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Napomena. Od posmatrane funkcije f (ako su obezbedjeni uslovi) možemo kreirati i parcijalne izvode k-tog reda ($k \geq 3$), na analogan način kao što smo formirali parcijalne izvode drugog reda. Oznake za takve parcijalne izvode i rasudjivanje o njima je potpuno

analogno sa oznakama i rasudjivanjem kao kod parcijalnih izvoda drugog reda. Parcijalnih izvoda k-tog reda ima 2^k.

PRIMER 2

Određivanje drugih parcijalnih izvoda.

Odrediti druge parcijalne izvode funkcije:

$$z = \frac{x^2}{2-y}$$

Rešenje. Prvi parcijalni izvodi su:

$$z_x' = \left(\frac{x^2}{2-y}\right)_x' = \frac{2x}{2-y} \quad \wedge \; z_y' = \left(\frac{x^2}{2-y}\right)_y' = \frac{x^2}{(2-y)^2}.$$

Drugi parcijalni izvodi su:

$$z_{xx}'' = \left(z_x'\right)_x' = \left(\frac{2x}{2-y}\right)_x' = \frac{2}{2-y}$$

$$z_{xy}'' = \left(z_x'\right)_y' = \left(\frac{2x}{2-y}\right)_y' = \frac{2x}{(2-y)^2}$$

$$z_{yx}'' = \left(z_y'\right)_x' = \left(\frac{x^2}{2-y}\right)_x' = \frac{2x}{(2-y)^2}$$

$$z_{yy}'' = \left(z_y'\right)_y' = \left(\frac{x^2}{(2-y)^2}\right)_y' = \frac{2x^2}{(2-y)^3}$$

Primećujemo da je $z_{xy}'' = z_{yx}''$ što važi uvek kada su parcijalni izvodi neprekidne funkcije.

STAV O JEDNAKOSTI MEŠOVITIH PARCIJALNIH IZVODA DRUGOG REDA

Pomenuta neprekidnost u prethodnom stavu nije najširi uslov da bi važila prethodna jednakost, ali za naše potrebe ovaj stav će biti dovoljan.

Mešoviti parcijalni izvodi drugog reda neke funkcije $z = f(x, y)$ u nekoj tački A ne moraju biti jednaki u opštem slučaju. Za naš dalji rad će biti od interesa kada su oni jednaki. O tome govori naredni stav.

Stav. Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ na oblasti $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka ova funkcija na $\mathcal{D}$ ima parcijalne izvode prvog i drugog reda. Uočimo tačku $A(a_1, a_2) \in D$ i pretpostavimo da su $f''_{xy}(x, y)$ i $f''_{yx}(x, y)$ neprekidni (kao funkcije) na nekom krugu sa centrom u tački A pozitivnog

poluprečnika koji ceo pripada oblasti $\mathcal{D}$.
Tada je

$$f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A)$$

Napomena. Pomenuta neprekidnost u prethodnom stavu nije najširi uslov da bi važila prethodna jednakost, ali za naše potrebe ovaj stav će biti dovoljan.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Lokalni ekstremi funkcije dve promenljive

STACIONARNE TAČKE

Stacionarne tačke funkcije dve promenljive se određuju iz sistema čije jednačine predstavljaju prvi parcijalni izvodi te funkcije izjednačeni sa nulom.

Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ na oblasti $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada za tačku $M_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{D}$ kažemo da je lokalni minimum, ako postoji barem jedna njena ε -okolina, u oznaci $\mathcal{O}_1$, gde je $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{D}$, takva da je $f(x_1, y_1) \leq f(x, y)$, za svako $(x, y) \in \mathcal{O}_1$. Takođe, za tačku $M_2 = (x_2, y_2) \in \mathcal{D}$ kažemo da je lokalni maksimum, ako postoji barem jedna njena ε -okolina, u oznaci $\mathcal{O}_2$, gde je $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{D}$, takva da je $f(x_2, y_2) \geq f(x, y)$, za svako $(x, y) \in \mathcal{O}_2$. Tačke lokalnih minimuma i maksimuma se nazivaju i lokalni ekstremi funkcije f na $\mathcal{D}$.

U narednom razmatranju ćemo dati jedan postupak za određivanje tačaka lokalnih ekstrema posmatrane funkcije (ako ih ona uopšte ima).

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Za tačku $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ kažemo da je stacionarna tačka funkcije f ako je rešenje sistema:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 0\,, \\ f'_y(x, y) &= 0\,, \end{aligned}$$

na $\mathcal{D}$.

Skup rešenja prethodnog sistema označimo sa S. On može biti prazan ili neprazan.

Stav. Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je S skup stacionarnih tačaka za tu funkciju na $\mathcal{D}$. Tada svaka tačka lokalnog ekstrema funkcije na oblasti D pripada skupu S .

Napomena. Iz prethodnog stava možemo zaključiti da ako je $S = \varnothing$, tada funkcija f na $\mathcal{D}$ nema lokalne ekstreme. Međutim, on ne važi u suprotnom smeru. To znači da sve tačke koje pripadaju skupu S ne moraju biti lokalni ekstremi. Stoga se nameće pitanje, ako je skup S neprazan, kako ćemo od svih tačaka koje mu pripadaju, izdvojiti one koje su lokalni ekstremi i kako ćemo znati da li su one lokalni maksimumi ili minimumi. O tome govorimo u nastavku.

SILVESTEROVO PRAVILO

Primena ovog pravila omogućava jednostavno određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije dve promenljive. U slučaju da je $\gamma = 0$, ovo pravilo ne daje odgovor.

Naredno tvrđenje će nam omogućiti da iz skupa S izdvajamo one tačke koje predstavljaju lokalni maksimum ili minimum određene funkcije dve promenljive, uz pretpostavku da je skup S neprazan.

Stav (Silvesterovo pravilo). Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisan na $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je S skup njenih stacionarnih tačaka na $\mathcal{D}$ takav da je $S \neq \varnothing$. Dalje, neka je $M_0(x_0, y_0) \in S$. Takođe, neka je

$$f''_{x^2}(M_0) = A, \quad f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0) = B, \quad f''_{y^2}(M_0) = C.$$

Označimo sa $\gamma = A \cdot C - B^2$. Tada

a) ako je $\gamma > 0$ i $A > 0$, tačka M_0 je lokalni minimum funkcije f na D;

b) ako je $\gamma > 0$ i $A < 0$, tačka M_0 je lokalni maksimum funkcije f na D;

c) ako je $\gamma < 0$, funkcija f u tački M_0 nema lokalnih ekstrema;

d) ako je $\gamma = 0$, za tačku M_0 nemamo nikakav odgovor po pitanju lokalnih ekstrema.

Napomena. 1) Silvesterovo pravilo je veoma značajan rezultat. Postoji opšta verzija ovog pravila za realne funkcije od k realnih promenljivih $(k \geq 2)$, iskazana preko pojma pozitivno definitne forme o kome ovde neće biti reči.

2) Nedostatak ovog pravila je da u slučaju pod d) ne možemo dobiti odgovor o postojanju lokalnog ekstrema funkcije f u posmatranoj tački M_0 . Ovaj nedostatak možemo prevazići analizom znaka drugog diferencijala funkcije f u okolini te tačke M_0 o kome ćemo govoriti u nastavku.

PRIMER

Primena Silvesterovog kriterijuma za određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije.

Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$$

Rešenje. Iz sistema

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 0,$$
$$f'_y(x,y) = 6y^2 - 6 = 0,$$

imamo da je $x^2 = 1$ i $y^2 = 1$, pa dobijamo četiri stacionarne tačke: $M_1(1,1)$, $M_2(-1,1)$, $M_3(1,-1)$, i $M_4(-1,-1)$. Odredimo, sada, druge parcijalne izvode, kako bismo proverili da li ove tačke jesu lokalni ekstremi

$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{y^2} = -12y.$$

Provera za tačku M_1.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_1) = 6$, $B = f''_{xy}(M_1) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_1) = -12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = -72 < 0$, pa tačka M_1 nije lokalni ekstrem funkcije $f(x,y)$.

Provera za tačku M_2.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_2) = -6$, $B = f''_{xy}(M_2) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_2) = -12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = 72 > 0$, pa tačka M_2 je lokalni maksimum jer je $A < 0$. Tada je $f_{max}(-1,1) = 6$.

Provera za tačku M_3.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_3) = 6$, $B = f''_{xy}(M_3) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_3) = 12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = 72 > 0$, pa tačka M_3 je lokalni minimum jer je $A > 0$. Tada je $f_{min}(1,-1) = -6$.

Provera za tačku M_4.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_4) = -6$, $B = f''_{xy}(M_4) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_4) = 12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = -72 < 0$, pa tačka M_4 nije lokalni ekstrem funkcije $f(x,y)$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 8

Metod najmanjih kvadrata

POSTUPAK ZA IZRAČUNAVANJE KOEFICIJENATA a I b

Za određivanje koeficijenata a i b koristimo Silvesterov kriterijum kako bismo odredili lokalni minimum funkcije $z = F(a, b)$.

Posmatrajmo ponovo funkciju

$$F(a,b) = [y_1 - (a + b \cdot x_1)]^2 + [y_2 - (a + b \cdot x_2)]^2 + \ldots + [y_n - (a + b \cdot x_n)]^2 = \sum_{k=1}^{n} \big[y_k - (a + b \cdot x_k)\big]^2.$$

S obzirom da je $F(a, b)$ funkcija dve promenljive, da bismo odredili minimum funkcije potrebno je prvo odrediti stacionarne tačke. Njih određujemo iz sledećih uslova $\dfrac{\partial F}{\partial a} = 0$ i $\dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$. Važi da je

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{k=1}^{n} 2\big[y_k - (a + b \cdot x_k)\big] \cdot (-1) = 0 \text{ i } \frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{k=1}^{n} 2\big[y_k - (a + b \cdot x_k)\big] \cdot (-x_k) = 0.$$

Deleći prethodne relacije sa -2, dobijamo sledeći sistem

$$\sum_{k=1}^{n} \big[y_k - (a + b \cdot x_k)\big] = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n} \big[y_k - (a + b \cdot x_k)\big] \cdot x_k = 0$$

odnosno

$$n \cdot a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot b = \sum_{k=1}^{n} y_k$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \cdot b = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

ODREĐIVANJE STACIONARNE TAČKE

Stacionarnu tačku određujemo iz uslova određujemo iz sledećih uslova $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ *i* $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$.

Ako iz poslednjeg sistema, prvu jednačinu prepišemo, a drugu jedančinu formiramo tako što prvu jednačinu pomnožimo sa $\sum\limits_{i=1}^{n} x_k$, a drugu sa $-n$ i saberemo ih, tada dobijamo sledeći sistem

$$n \cdot a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot b = \sum_{k=1}^{n} y_k$$
$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \cdot b = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

Iz druge jednačine dobijamo

$$b = \frac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Zamenom dobijenog za koeficijent b u prvu jednačinu, dobijamo

$$a = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right)}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

ODREĐIVANJE LOKALNOG EKSTREMA

Primena Silvesterovog kriterijuma.

Dobili smo da funkcija $z = F(a, b)$ ima jednu stacionarnu tačku $S\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right)}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \frac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\right)$ .Sada ćemo proveriti da li je ona i lokalni ekstrem ove funkcije i odrediti njenu prirodu primenom Silvesterovog kriterijuma. Važi da je

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{k=1}^{n} 2(-y_k + a + b \cdot x_k) \text{ i } \frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{k=1}^{n} 2(-x_k \cdot y_k + a \cdot x_k + b \cdot x_k^2) = 0.$$

Iz prethodnog dobijamo da je

$$A = \frac{\partial^2 F(S)}{\partial a^2} = 2 \cdot n, \quad B = \frac{\partial^2 F(S)}{\partial a^2} = 2\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad C = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

kao i

$$\gamma = AC - B^2 = 4n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = 4n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{n^2}\right) =$$

$$= 4n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n}\right)^2\right) = 4n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{x}^2\right) = 4n^2\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2.$$

Kako je $A > 0$ i $\gamma > 0$ zaključujemo da je u tački S lokalni minimum funkcije F.

ODREĐIVANJE REGRESIONE PRAVE PRIMENOM METODE NAJMANJIH KVADRATA

Regresiona konstanta a i koeficijent regresije b određeni pomoću metoda najmanjih kvadrata se određuju datim formulama.

Kao što smo rekli, regresiona linija izražava se jednačinom

$$y = a + b \cdot x,$$

gde je y – zavisno promenljiva, x – nezavisno promenljiva, a – regresiona konstanta, b – koeficijent regresije. Parametar a se naziva regresiona konstanta i njome određuje „nivo“ regresione prave. Parametar b predstavlja koeficijent regresije i određuje nagib regresione prave. Koeficijent regresije predstavlja koeficijent pravca regresione prave. Zavisno promenljiva y je nepoznata promenljiva koja se izračunava na osnovu vrednosti nezavisne promenljive x koja je poznata. Vrednost za Y, kada je $X = 0$ predstavlja tačku u kojoj regresiona linija seče Y -osu. Drugim rečima, to je početna vrednost zavisne Y kada još uvek nije počela da deluje nezavisna X.
U ovom modelu se za koeficijent regresije b koristi formula određena pomoću metode najmanjih kvadrata

$$b = \frac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

dok se koeficijent a određuje na sledeći način

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x},$$

gde su $\overline{x}$ i $\overline{y}$ aritmetičke sredine odgovarajućih veličina iz uzorka.

Napomena. Sa n je u jednačini označen ukupan broj parova koji po nekim autorima ne bi smeo da bude manji od 12 da bi se dobila reprezentativna regresiona prava i pravi oblik međuzavisnosti među pojavama.

Kada se odrede koeficijenti za prostu linearnu regresiju metodom najmanjih kvadrata, može se postaviti pitanje koliko je dobro ocenjena regresiona linija ovim parametrima, u odnosu na regresionu liniju polaznog skupa? O tome govori sledeći stav.

Stav. Ako su ispunjene sve pretpostavke prostog linearnog regresionog modela, ocene dobijene metodom najmanjih kvadrata su najbolje, nepristrasne linearne ocene.

Napomena. Metodom najmanjih kvadrata se koristi i za određivanje koeficijenata nelinearnih regresionih modela.

REPREZENTATIVNOST REGRESIONOG MODELA

Apsolutna mera kojom se može meriti reprezentativnost regresionog modela naziva se standardna greške regresije.

Metodom najmanjih kvadrata smo dobili regresionu pravu koja je najpribližnija regresionoj liniji polaznog skupa. Potrebno je, sada, ispitati koliko je dobro regresiona linija prilagođena podacima i testirati da li objašnjavajuća promenljiva predstavlja bitan faktor pri objašnjavanju varijacija za Y.

Apsolutna mera kojom se može meriti reprezentativnost naziva se standardna greške regresije. Ona, u regresionoj analizi, igra ulugu standardne devijacije. Računa se po formuli

$$SE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + b \cdot x_i)]^2}{n-2}}$$

U datoj formuli, imenilac predstavlja sumu kvadrata odstupanja, koji se deli sa $n-2$. Naime, kako ocenjujemo dva parametra, obim uzorka n se umanjuje za 2.

PRIMER - 1. DEO

Postavka problema.

Jedan operator digitalne i analogne kablovske televizije, širokopojasnog interneta i fiksne i mobilne telefonije u Srbiji želi da proveri da li postoji povezanost između broja kvarova koje korisnici prijavljuju operaterima njihovog kol centra sa dužinom razgovora (u minutama)

koji operateri provedu u razgovoru sa njima. Nakon preslušavanja 14 nasumično izabranih snimljenih poziva korisnika dobijen je sledeći uzorak

Redni broj (i)	Dužina razgovora u min. (y)	Broj prijavljenih kvarova (x)
1	23	1
2	29	2
3	49	3
4	64	4
5	74	4
6	87	5
7	96	6
8	97	6
9	109	7
10	119	8
11	149	9
12	145	9
13	154	10
14	166	10
$\sum$	1361	84

Odrediti koeficijent linearne korelacije i regresionu pravu.

Rešenje. Imamo da je $\overline{x} = \dfrac{84}{14} = 6$ i $\overline{y} = \dfrac{1361}{14} = 97,21$.

PRIMER - 2. DEO

Fromiranje radne tabele i izračunavanje koeficijenta linearne korelacije.

Sada ćemo formirati radnu tabelu

i	y_i	x_i	$(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})$
1	23	1	−74.21	−5	5507.76	25	371.07
2	29	2	−68.21	−4	4653.19	16	272.86
3	49	3	−48.21	−3	2324.62	9	144.64
4	64	4	−33.21	−2	1103.19	4	66.43
5	74	4	−23.21	−2	538.90	4	46.43
6	87	5	−10.21	−1	104.33	1	10.21
7	96	6	−1.21	0	1.47	0	0.00
8	97	6	−0.21	0	0.05	0	0.00
9	109	7	11.79	1	138.90	1	11.79
10	119	8	21.79	2	474.62	4	43.57
11	149	9	51.79	3	2681.76	9	155.36
12	145	9	47.79	3	2283.47	9	143.36
13	154	10	56.79	4	3224.62	16	227.14
14	166	10	68.79	4	4731.47	16	275.14
Total	1361	84	0.00	0	27768.36	114	1768.00

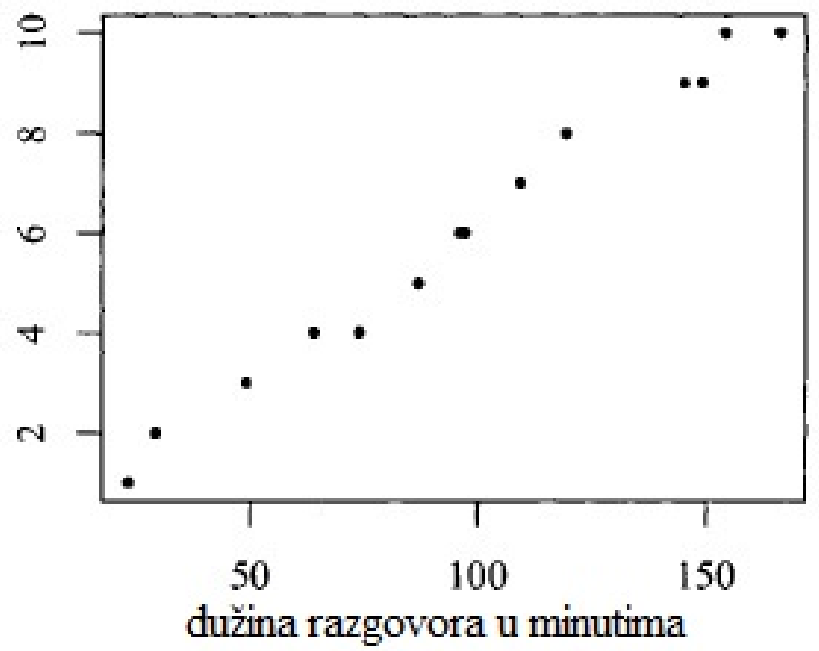
Slika 8.1 Radna tabela [Izvor: Autor].

Sada je

$$r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{14}(x_i-\overline{x})\cdot(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{14}(x_i-\overline{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{14}(y_i-\overline{y})^2}} = \frac{1768}{\sqrt{114\cdot 22768,36}} = 0,996.$$

PITANJE ZA STUDENTE: Šta možemo reći za koeficijent linearne korelacije?

Na sledećoj slici predstavljen je dijagram rasturanja.



Slika 8.2 Dijagram rasturanja [Izvor: Autor].

PRIMER - 3. DEO

Određivanje koeficijenata regresione prave i njeno skiciranje.

Radna tabela za određivanje koeficijenata regresione prave

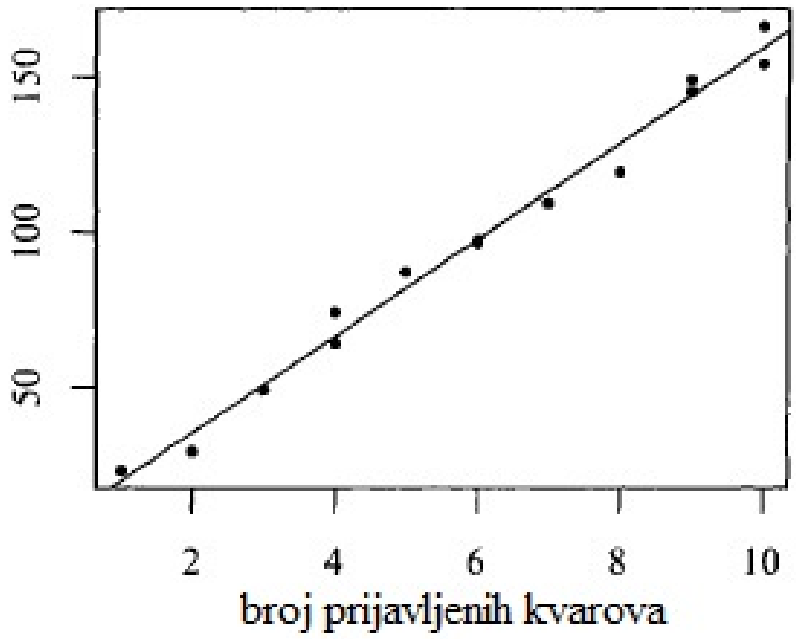
i	y_i	x_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	23	1	1	23
2	29	2	4	58
3	49	3	9	147
4	64	4	16	256
5	74	4	16	296
6	87	5	25	435
7	96	6	36	576
8	97	6	36	582
9	109	7	49	763
10	119	8	64	952
11	149	9	81	1341
12	145	9	81	1305
13	154	10	100	1540
14	166	10	100	1660
$\sum$	1361	84	618	9934

Sada je

$$b = \frac{14 \cdot 9934 - 84 \cdot 1361}{14 \cdot 618 - 84^2} = \frac{24752}{1596} = 15,509,$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 97,21 - 15,509 \cdot 6 = 4,162.$$

Regresiona prava je $y = 4,162 + 15,509 \cdot x$.



Slika 8.3 Regresiona prava [Izvor: Autor].

VIDEO KLIP 1

Youtube snimak - Metod najmanjih kvadrata - I deo (o samom modelu).

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Youtube snimak - Metod najmanjih kvadrata - II deo (rešenje primera).

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 9

Pokazna vežba

ZADATAK 1 – 1. DEO (30 MINUTA)

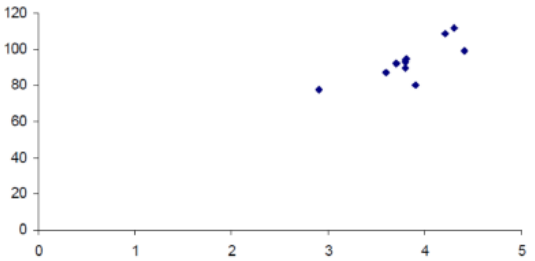
Formiranje radne tabele za dati primer i dijagram rasturanja.

Dati podaci o dve promenljive

n	x_i	y_i
1	4,21	108,4
2	4,3	112
3	3,6	87,3
4	4,41	99
5	3,8	93
6	3,7	92,3
7	3,8	90
8	3,8	94
9	3,81	95
10	3,7	92,3
11	2,9	7,96
12	3,9	80
Σ	44,72	1122,9

Slika 9.1 Tabela s podacima [Izvor: Autor].

Konstruišimo regresionu krivu. Kao prvi korak podatke treba ubaciti u dijagram rasturanja, da bi se ocenilo postojanje korelacije i oblik zavisnosti. Ucrtane tačke najbolje pokazuju (aproksimiraju) oblik prave linije, kao i porast u pozitivnom smeru. To znači da sa porastom vrednosti obeležja *X* rastu i vrednosti obeležja *Y*.



Slika 9.2 Dijagram rasturanja podataka [Izvor: Autor].

N	x	y	x^2	y^2	xy
1	4,21	108,4	17,72	11750,56	456,36
2	4,30	112,0	18,49	12544,0	481,60
3	3,60	87,3	12,96	7621,29	314,28
4	4,41	99,0	16,81	980,0	405,90
5	3,80	93,0	14,44	8649,0	353,40
6	3,70	92,3	13,96	8519,19	341,51
7	3,80	90,0	14,44	8100,0	342,00
8	3,80	94,0	14,44	8836,0	357,20
9	3,81	95,0	14,52	9025,0	361,95
10	3,70	92,3	13,69	8519,29	341,51
11	2,90	77,96	8,41	6336,16	230,84
12	3,90	80,0	9,00	6400,0	240,00
Σ	44,72	1122,9	168,61	106101,59	4226,55

Slika 9.3 Radna tabela [Izvor: Autor].

ZADATAK 1 – 2. DEO

Određivanje regresione prave metodom najmanjih kvadrata i njeno grafičko predstavljanje.

Odredimo prvo aritmetičke sredine iz uzoraka. Tada imamo da je

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 3,73 \quad \text{i} \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = 93,58.$$

Sada je

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{12 \cdot 4226,5 - 44,72 \cdot 1122,9}{12 \cdot 168,61 - 44,72^2} = 21,44.$$

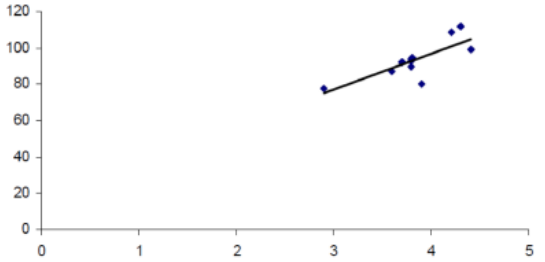
Odredimo i koeficijent a. Sada je

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 93,58 - 21,44 \cdot 3,73 = 13,61.$$

Sada imamo sve parametre za izračunavanje jednačine regresije, koja glasi:

$$y = 13,61 + 21,44 \cdot x.$$

Kao što se iz slike može videti, prava linija je blizu svih tačaka i zbir kvadrata odstupanja je manji nego za bilo koju drugu pravu liniju, tj. zbir kvadrata odstupanja je minimalan.



Slika 9.4 Regresiona prava metod najmanjih kvadrata [Izvor: Autor].

ZADATAK 2 – 1. DEO (30 MINUTA)

Metod najmanjih kvadrata – formiranje radne tabele.

Raspolažemo podacima o medijskoj propadandi i obimu prodaje odredjeno tipa *cooler*-a u milionima:

Propaganda	4	5	5	6	7	9
Prodaja	55	73	79	89	115	133

Slika 9.5 Tabela s podacima [Izvor: Autor].

Odrediti jednačinu regresione prave koja predstavlja između izdataka za propagandu i obima prodaje.

<u>Rešenje.</u> Regresiona linija izražava se jednačinom: $y = a + b \cdot x$,

Regresiona konstanta a i koeficijent regresije b određeni pomoću metoda najmanjih kvadrata imaju formule:

$$b = \frac{n\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}, \qquad a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}.$$

Najpre, formirajmo sledeću tablicu:

	x	y	x^2	$x \cdot y$
	4	55	16	220
	5	73	25	365
	5	79	25	395
	6	89	36	534
	7	115	49	805
	9	133	81	1197
$\sum$	36	544	232	3516

Slika 9.6 Radna tabela [Izvor: Autor].

ZADATAK 2 – 2. DEO

Metod najmanjih kvadrata – određivanje regresione krive.

Kako je $n = 6$, tada imamo da je:

$$b = \frac{n\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} = \frac{6 \cdot 3516 - 36 \cdot 544}{6 \cdot 232 - 36^2} = 15,7498.$$

Kako je $\overline{x} = \frac{36}{6} = 6$ i $\overline{y} = \frac{544}{6} = 90,667$, tada imamo da je:

$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 90,667 - 6 \cdot 15,7498 = -3,8321.$

Dakle, regresiona prava glasi:

$y = -3,8321 + 15,7498 \cdot x.$

ZADATAK 3 – 1. DEO (30 MINUTA)

Formiranje radne tabele.

Za nekoliko slučajno odabranih porodica dobijeni su podaci o dnevnoj potrošnji mleka u litrima i broju članova porodice:

broj članova porodice	2	4	3	6	3	4	3	4
potrošnja mleka	1	3	1	4	2	2	2	3

Slika 9.7 Tabela s podacima [Izvor: Autor].

a) Odrediti parametre linearne veze između broja članova porodice i potrošnje mleka

b) Proceniti potrošnju mleka u petočlanoj porodici.

Rešenje.

a)

	x	y	x^2	$x \cdot y$
	2	1	4	2
	4	3	16	12
	3	1	9	3
	6	4	36	24
	3	2	9	6
	4	2	16	8
	3	2	9	6
	4	3	16	12
$\sum$	29	18	115	73

Slika 9.8 Radna tabela [Izvor: Autor].

ZADATAK 3 – 2. DEO

Određivanje regresione prave i trenda.

Kako je $n = 8$, tada imamo da je:

$$b = \frac{n\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} = \frac{8 \cdot 73 - 29 \cdot 18}{8 \cdot 115 - 29^2} = 0,7848.$$

Kako je $\overline{x} = \frac{29}{8} = 3,625$ i $\overline{y} = \frac{18}{8} = 2,25$, tada imamo da je:

$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 2,25 - 0,7848 \cdot 3,625 = -0,5949.$

Dakle, regresiona prava glasi:

$y = -0,5949 + 0,7848 \cdot x.$

Potrošnja mleka u čevoročlanoj porodici iznosi:

$y = -0,5949 + 0,7848 \cdot 4 = 2,5443.$

VIDEO KLIP

Youtube snimak: Linearna regresiona analiza Excel.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 10

Individualna vežba

ZADACI ZA INDIDVIDUALNI RAD

Zadaci za samostalan rad studenata.

Zadatak. Na slučaj je odabrano 10 studenata i oni su izjavili koliko sati su spremali ispit iz statistike. Njihove odgovore smo uporedili sa bodovima koje su dobili na ispitu. Maksimalni broj bodova koji se može osvojiti na ispitu je 100.

sati učenja u časovima	12	31	22	7	$10,8$	25	$15,6$	$23,5$	$17,2$	14
osvojeni broj bodova	45	60	88	25	42	85	51	80	60	53

Odrediti koeficijent linearne korelacije $r_{X,Y}$. Odrediti jednačinu linearne regresije bodova (y) u odnosu na vreme provedeno u spremanju ispita, izraženom u satima (x).

Rezultat. $r_{X,Y} = 0,775,\ y = 2,11886 \cdot x + 21,1631.$

Zadatak. U tabeli vidimo prikaz pušackog staža i kapaciteta pluća kod 10 slučajno odabranih pušaca starih trideset godina.

godine pušenja	1	3	6	4	10	3	15	10	8	10
kapacitet pluća u l	$4,9$	$5,3$	$4,4$	$5,1$	$4,1$	$4,8$	4	$4,2$	$4,2$	$4,1$

Odrediti jednačinu linearne regresije kapaciteta pluća (y) po godinama pušackog staža (x) i odrediti koeficijent linearne korelacije $r_{X,Y}$.

Rezultat. $r_{X,Y} = -0,86577,\ y = -0,09471 \cdot x + 5,1729.$

vreme izrade: 1. 30 minuta; 2. 30 minuta.

Zaključak

KORELACIONA ANALIZA I LINEARNA REGRESIJA

Koeficijent linearne korelacije, Testiranje hipoteze o koreliranosti dve slučajne promenljive, linearna regresija.

Statističko istraživanje veza medju pojavama vrši se multivarijacionom analizom koja se deli na regresionu i korelacionu analizu. Predmet regresione analize jeste otkrivanje forme korelacione veze, odnosno forme slaganja varijacija pojave. Predmet korelacione analize jeste otkrivanje karaktera i stepena (čvrstine) kvantitativnog slaganja varijacija pojava. Jedna i druga analiza se medjusobno dopunjuju.

Dakle, ispitivanje zavisnosti u statističkoj analizi ima dva osnovna pravca:

1. jačinu zavisnosti koju određuje korelaiciona analiza,

2. oblik zavisnosti koji ispituje regresiona analiza.

U istraživanjima najčešće se sreće linearni model regresione i korelacione analize.

LITERATURA

M. Rajović, D. Stanojević, Verovatnoća i statistika – teorija i primeri, Akademska misao, Beograd, 2006. god.
Glišić Z., Peruničić P., Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
Vera Lazarević, Marija Đukić, Inženjerska matematika, Tehnički fakultet, 2010.
Dr Mališa Žižović, dr Sabahudin Mekić, dr Mirjana Šekarić Poslovna statistika, izdavač: Viša poslovna škola Kosovo Polje – Blace, Blace 2003. godine.